Fen Bilimleri Dergisi, Cilt **32**, No. 1, (2011)

Uniqueness Theorems for Sturm-Liouville Operators With Discontinuity Conditions

Rauf AMİROV*and Elif ERYILMAZ

Department of Mathematics, Faculty of Science, Cumhuriyet University, SIVAS 58140, TURKEY

Received 20.07.2011; Accepted 05.08.2011

Abstract. Bu çalışmada aralığın iç noktasında süreksizlik koşullarına sahip Sturm-Liouville operatörü için teklik teoremleri ispatlanmış ve V. A. Ambartsumyan teoreminin süreksizlik koşulları altında genelleştirilmesi verilmiştir.
AMS subject classifications: Primary 34A55, Secondary 34B24, 34L05
Key words: Inverse Problems, Spectrum, Normalized Numbers.

Süreksizlik Koşullarına Sahip Sturm-Liouville Operatörleri için Teklik Teoremleri

Özet. In this study, uniqiness theorems for Sturm-Liouville Operators with discontinuity conditions inside an interval have proved and generalization of V. A. Ambartsumyan theorem has been given under the discontinuity conditions.
Anahtar Kelimeler. Ters Problem, Spektrum, Normalleştirici Sayılar.

1. Giriş

Ters problemler teorisi, lineer diferansiyel operatörlerin spektral analizinde önemli bir yere sahiptir ve de fonksiyonel analizin bir sıra problemleri ile sıkı bağlantılıdır. Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma V.A. Ambartsumyan' a [1] aittir. 1929 yılında V.A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

Teorem 1.1: $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0, \quad (0 < x < \pi), \tag{1.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{1.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

V.A. Ambartsumyan' ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G.Borg' a aittir[2].

*Corresponding author. *Email addresses:* `emirov@cumhuriyet.edu.tr`

Teorem 1.2: $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (1.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{1.3}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{1.4}$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$ ler ise (1.1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \qquad (h \neq h_1) \tag{1.5}$$

(1.4) sınır koşullarıyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir. $(h, h_1$ ve H sonlu gerçel sayılardır.)

G. Borg' un bu çalışmasında, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilir ve operatörü bu dizilerin yardımıyla belirtmektedir. Yani, bu tip operatörün varlığı önceden belli olduğu kabul edilir. G. Borg, aynı çalışmada, bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, V.A. Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığını N. Levinson [3], [4] ispatlamıştır. Ayrıca, N. Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının, potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki en önemli aşamalardan birisi V.A. Marchenko [12] tarafından kaydedilmiştir.

1950 yılında V.A. Marchenko[12] ters problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (1.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \qquad \varphi'(0, \lambda) = h, \tag{1.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu operatörün özfonksiyonları olsun. Bu durumda verilen operatörün

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n)dx \tag{1.7}$$

normalleştirici sayılarından faydalanarak oluşturulan

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n} \tag{1.8}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V.A. Marchenko, yukarıda bahsedilen çalışmada G. Borg'un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada, $\rho(\lambda)$ fonksi-yonun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. V. A. Marchenko' nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M.G. Krein [10], [11] çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat, bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerden faydalanılarak kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V.A. Marchenko' nun çalışması yayınlanmadan önce A.N. Tikhonov [7] tarafından V. A. Marchenko' nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır. A.N. Tikhonov' un çalışmasında ispatlanan teoremin ifadesi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 1.3: $\lambda < 0$ olduğunda

$$U'' + \lambda\rho^2(x)U = 0, \qquad x > 0, \qquad U(\infty) = 0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ dır. $R(\lambda) = \dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. Bu durumda $\lambda < 0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

1951 yılında I.M. Gelfand ve B. M. Levitan [8], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları vermişlerdir. Ayrıca, bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörü-nün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ $(\alpha_n > 0)$ dizilerine göre belirlenmesi için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için, gerekli ve yeterli koşul aşağıda verilen klasik asimptotik eşitliklerin sağlanmasıdır:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \cdots + \frac{a_{\|\frac{m}{2}\|}}{n^{2\|\frac{m}{2}\|+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\|\frac{m}{2}\|+1}},$$
$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \cdots + \frac{b_{\|\frac{m}{2}\|}}{n^{2\|\frac{m}{2}\|+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2\|\frac{m+1}{2}\|}}$$

burada $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[h + H + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum\left(\dfrac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek ise $\sum\left(\dfrac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dir.

Fakat, bu çalışmalarda ters problemin iki spektruma göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B.M. Levitan ve M.G. Gasimov' un [9] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada, veri-len problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n}\prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{1.9}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n$. çarpanın bulunmadığını gösterir. (1.9) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (1.9) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve [9] çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri sıralı, yani
$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots$

2) λ_n ve μ_n'ler

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$
$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

3) $a_0 \neq a_0'$

Çevirme operatörlerine dayanan regüler Sturm- Liouville operatörünün spekt-ral verisinden, q potansiyelini yeniden elde etmenin algoritması, Marchenko ve Gelfand (1950) tarafından geliştirilen Gelfand- Levitan- Marchenko denklemi olarak adlandırılır. İki spektrum ile q potansiyelinin kurulumu için bir alternatif metot Krein (1951) tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra H Hilbert uzayından potansiyellere sahip Sturm- Liouville operatörler sınıfı için Trubowitz ve Pöschel (1987) tarafından farklı bir yaklaşım önerilmiştir. Yazarlar spektral veriyi ve H deki potansiyeller arasındaki dönüşümü ayrıntılı olarak çalışmışlar ve ters spektral problemin çözülebilirliğini ispatlamışlardır. Özellikle spektral veriyi tam olarak karakterize etmişlerdir.

Aralığın iç noktasında singülariteye ve süreksizlik koşullarına sahip diferansiyel operatörler, Amirov ve Yurko (2001) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada $x = 0$ noktasında singülariteye sahip self adjoint olmayan Bessel potansiyelli Sturm-Liouville operatörü için sonlu aralığın iç noktasında çözümün süreksizliğe sahip olduğu durum incelenmiştir ve verilen operatörün spektral özellikleri ile bu spektral özelliklere göre ters problemin konumu ve çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Benzer şekilde R.Kh Amirov (2002) çalışmasında self- adjoint olmayan Bessel potansiyelli Sturm- Lioville operatörünün sonlu aralıkta sonlu sayıda süreksizlik noktalarına sahip olduğu durumu incelemiştir. Burada verilen diferansiyel operatörü üreten diferansiyel denklemin çözümlerinin davranışları, operatörün spektral özellikleri, spektrumu basit olduğu durumda yani yalnızca özdeğerlerden oluştuğu durumda, özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon ve koşulmuş fonksiyonlara göre operatörün ayrışımı, spektral parametrelere göre ters problemin konumu ve bu ters problemlerin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

R.Kh. Amirov un (2006) çalışmasında, sonlu aralığın iç noktasında sürek-sizliğe sahip Sturm- Liouville diferansiyel operatörler sınıfı için çevirme ope-ratörü, çekirdek fonksiyonunun bazı özellikleri, spektral karakteristiklerinin bazı özellikleri ve ters problem için teklik teoremleri verilmiştir.

2. S Sınıfı İçin Ters Problemler

L operatörü aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$l\,(y) := -y^{''} + q(x)y = \lambda y \ , \ \ x \in (0,d) \cup (d,\pi), \quad \lambda = k^2 \tag{2.1}$$

$$U\,(y) = y^{'}(0) - hy(0) = 0, \quad V\,(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{2.2}$$

$$y(\frac{\pi}{2} + 0) = \alpha y(\frac{\pi}{2} - 0), \qquad y'(\frac{\pi}{2} + 0) = \alpha^{-1} y'(\frac{\pi}{2} - 0) \tag{2.3}$$

S ile $q(x) \in L_2\,(0,\pi)$ olmak üzere $q(x) = q(\pi - x)$ ve $H = h$ koşullarını sağlayan $(2.1), (2.2), (2.3)$ Sturm-Liouville operatörleri sınıfını belirtelim. $\varphi(x,\lambda)$ fonksi-yonu (2.1) denkleminin $\varphi(0,\lambda) = 1, \varphi^{'}(0,\lambda) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 2.1: Sturm-Liouville operatörünün S sınıfından olması için gerek ve yeterli koşul ;

$$\varphi(\pi,\lambda_n) = \alpha^+(-1)^n + \alpha^-$$

olmasıdır.

İspat: Gereklilik: Diyelim ki, $q(\pi - x) = q(x)$, $H = h$ olsun. Bu durumda $\Psi_n(x,\lambda_n) = \varphi(\pi - x,\lambda_n)$ fonksiyonu da L operatörünün λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonudur. Bundan dolayı;

$$\varphi(x,\lambda_n) = \beta_n \varphi(\pi - x,\lambda_n), \beta_n \neq 0 \tag{2.4}$$

dır. $x \to \frac{\pi}{2}^+$ için ;

$$\varphi(\frac{\pi}{2}^+,\lambda_n) = \beta_n \varphi(\frac{\pi}{2}^-,\lambda_n)$$

$\varphi(\frac{\pi}{2}^-,\lambda_n) \neq 0$ olursa $\beta_n = \alpha$ dır.

$$\varphi(\frac{\pi}{2}^+,\lambda_n) = 0 \text{ ve } \varphi^{'}(\frac{\pi}{2}^+,\lambda_n) \neq 0$$

olsun. (2.4) eşitliğinin x'e göre türevi alınıp tekrar $x \to \frac{\pi}{2}^-$ iken limite geçilirse

$$-\varphi^{'}(\pi - x,\lambda_n) = \beta_n \varphi^{'}(x,\lambda_n)$$

olduğundan

$$-\varphi^{'}(\frac{\pi}{2}^-,\lambda_n) = \beta_n \varphi^{'}(\frac{\pi}{2}^+,\lambda_n) \text{ ise } \beta_n = -\alpha^{-1}$$

olarak bulunur. Buradan da $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n = (-1)^n\,\alpha^+ + \alpha^-$ olduğu çıkar.(2.4) eşitliğinde $x = 0$ yazılırsa

$$\varphi(\pi,\lambda_n) = \beta_n \varphi(0,\lambda_n) \text{ ise } \varphi(\pi,\lambda_n) = \beta_n = (-1)^n\,\alpha^+ + \alpha^-$$

elde edilir. Özdeğerlerin sırasını değiştirmekle $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n = (-1)^n\,\alpha^+ + \alpha^-$ eşitliğinin elde edilebileceği açıktır.

Yeterlilik: $q(x)$ ve $q(\pi-x)$ potansiyelli (2.1)-(2.3) problemlerin ürettiği operatörler sırasıyla L ve $\tilde{L}$, onların normalleştirici sayıları ise α_n, $\tilde{\alpha}_n$ $(n=0,1,2...)$ olsun. $\varphi(\pi,\lambda_n)=(-1)^n\alpha^+ + \alpha^-$ olduğunu kabul edelim ve

$$\Psi_n(x)=\left[(-1)^n\alpha^+ + \alpha^-\right]\varphi(\pi-x,\lambda_n)$$

olsun. O halde $\Psi_n(x)$ fonksiyonu L operatörünün λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonudur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-0}\Psi_n^2(x)dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\Psi_n^2(x)dx\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-0}\left[\left((-1)^n\alpha^+ + \alpha^-\right)\ \varphi(\pi-x)\right]^2dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\left[\left((-1)^n\alpha^+ + \alpha^-\right)\ \varphi(\pi-x)\right]^2dx\\ &= 2\left[\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+(-1)^n\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]\alpha_{n1}\end{aligned}$$

olduğundan dolayı α_n ve $\tilde{\alpha}_n$ lar, dolayısıyla L ve $\tilde{L}$ operatörlerinin spektral fonksiyonları bir sabit çarpanı ile farklıdırlar.

Bundan dolayı V. A. Marchenko'nun teklik teoremine [5] göre $q(\pi-x)=q(x)$ ve $H=h$ olduğu çıkar.

Şimdi de gösterelim ki;

$$\alpha_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-}\varphi^2(x,\lambda_n)dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}+}^{\pi}\varphi^2(x,\lambda_n)dx=\dot{\varphi}(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_n)-\dot{\varphi}'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_n)$$

eşitliği doğrudur. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları verilen diferansiyel denklemin uygun başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olduğundan

$$-\varphi''(x,\lambda_n)+q(x)\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n\varphi(x,\lambda_n) \tag{2.5}$$

$$-\varphi''(x,\lambda)+q(x)\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda) \tag{2.6}$$

(2.5) eşitliği $\varphi(x,\lambda)$, (2.6) eşitliği $\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(\lambda-\lambda_n)\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)=-\varphi''(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+\varphi(x,\lambda)\varphi''(x,\lambda_n)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $[0,\pi]$ aralığında x e göre integrallenir ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}&(\lambda-\lambda_n)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-0}\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx+(\lambda-\lambda_n)\int\limits_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx\\ &=\left[\varphi'(\pi,\lambda_n)-\varphi'(\pi,\lambda)\right]\varphi(\pi,\lambda)-\left[\varphi(\pi,\lambda_n)-\varphi(\pi,\lambda)\right]\varphi'(\pi,\lambda)\end{aligned}$$

alınır. Son eşitliğin her iki tarafı $\lambda-\lambda_n$'e bölünürse;

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-0}\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi}\varphi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx\\ &=\frac{\varphi'(\pi,\lambda_n)-\varphi'(\pi,\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\varphi(\pi,\lambda)-\frac{\varphi(\pi,\lambda_n)-\varphi(\pi,\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\varphi'(\pi,\lambda)\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $\lambda \to \lambda_n$ koşulu altında limite geçilirse;

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \varphi^2(x,\lambda_n)dx + \int_{\frac{\pi}{2}+0}^{\pi} \varphi^2(x,\lambda_n)dx \\ &= \dot{\varphi}'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_n) - \dot{\varphi}(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_n)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\dot{\varphi}(\pi,\lambda)$ ile fonksiyonun λ'ya göre türevi belirtilmektedir. Diğer taraftan $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu λ'ya göre tam fonksiyon ve $\{\lambda_n\}$'ler verilen problemin özdeğerleri olduğundan tam fonksiyonlar teorisinden bilindiği gibi

$$\varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda) = \pi(\lambda_0 - \lambda)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k - \lambda}{k^2} = \phi(\lambda) \tag{2.7}$$

gösterimi doğrudur.(2.7) eşitliğinin λ'ya göre türevi alınırsa,

$$\dot{\varphi}'(\pi,\lambda) + H\dot{\varphi}(\pi,\lambda) = \dot{\phi}(\lambda) \tag{2.8}$$

olur. Diğer taraftan

$$\varphi'(\pi,\lambda_n) + H\varphi(\pi,\lambda_n) = 0 \text{ veya } \varphi'(\pi,\lambda_n) = -H\varphi(\pi,\lambda_n)$$

olduğundan α_n'nin ifadesi için

$$\alpha_n = -\varphi(\pi,\lambda_n)\dot{\phi}(\lambda_n) \tag{2.9}$$

elde edilir.

Eğer $L \in S$ ise yukarıda ispatı yapılan lemmaya göre

$$\alpha_n = ((-1)^n\alpha^+ + \alpha^-)\dot{\phi}(\lambda_n) \tag{2.10}$$

bulunur. L operatörünün $\{\lambda_n\}$ spektrumu verilmiş ise o zaman (2.7) ve (2.10) formüllerinden α_n normalleştirilmiş sayıları ve $\{\lambda_n\}$ L'nin $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonunu belirler. Spektral fonksiyonu belli ise V. A. Marchenko' nun teklik teoremine göre L operatörü inşa edilebilir.

Gösterelim ki bu şekilde inşa edilen operatör $L \in S$ dir. Bunun için lemmaya göre

$$\varphi(\pi,\lambda_n) = (-1)^n\alpha^+ + \alpha^-$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. (2.9) ve (2.10) eşitliklerinden

$$\varphi(\pi,\lambda_n) = (-1)^n\alpha^+ + \alpha^-$$

olduğu görülür.

Böylece belli asimptotiğe sahip, $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ spektrumuna ve $\varepsilon_n = (-1)^n\alpha^+ + \alpha^-$ sayılar dizisine göre S sınıfından olan Sturm-Liouville operatörü inşa edilebilir.

3. Singüler Sturm-Liouville Denklemi İçin V. A. Ambartsumyan Teoreminin Genelleştirilmesi

Teorem 3.1: λ spektral parametre, $q(x) \in C[0,\pi]$ ve $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ olmak üzere $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, ...$ sayıları

$$-y^{''} + q(x)y = \lambda y, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \lambda = k^2 \tag{3.1}$$

$$y^{'}(0) = 0, y^{'}(\pi) = 0 \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} &y(x_0 + 0) = \alpha y(x_0 - 0), \quad x_0 \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\tfrac{\pi}{2}, \pi\right) \\ &y^{'}(x_0 + 0) = \alpha y^{'}(x_0 - 0) \end{aligned} \tag{3.3}$$

sınır değer probleminin özdeğerleri ise $q(x) \equiv 0$ dır.

İspat: İlk önce problemimizin genel çözümünü bulalım. Bunun için; (3.1) eşitliğinin $y(0,\lambda) = 1$, $y^{'}(0,\lambda) = 0$ (3.2) başlangıç ve (3.3) süreksizlik koşullarını sağlayan $y(x,\lambda)$ çözümünü önerelim. Sabitlerin değişimi yöntemi uygulanırsa;

$$y_1(x,k) = \cos kx + \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)\, q(t) y_1(t,k)dt, x < x_0 \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} y_2(x,k) = {}& \alpha \cos kx + \frac{\alpha}{k}\int_0^{x_0-0} \sin k(x-t)\, q(t)y_1(t,k)dt \\ &+ \frac{1}{k}\int_{x_0+0}^{x} \sin k(x-t)q(t)y_2(t,k)dt, x > x_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir.

$\mu(k) := \max\limits_{0 \le x \le x_0} \left(|y_1(x,k)|\, e^{-|Imk|x}\right)$

$\widetilde{\mu}(k) := \max\limits_{x_0 \le x \le \pi} \left(|y_2(x,k)|\, e^{-|Imk|x}\right)$

tanımlayalım.

$|\sin kx| \le e^{|Imk|x}$ ve $|\cos kx| \le e^{|Imk|x}$
olduğundan (3.4)-(3.5) denkleminden $|k| \ge 1$ ve $x \in [0, x_0)$ için;

$$y_1(x,k) = \cos kx + O(\frac{1}{|k|}e^{|Imk|x})$$

$$y_2(x,k) = \alpha \cos kx + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|Imk|x}\right)$$

bulunur.

(3.1)-(3.4) probleminin özdeğerleri için

$$k_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{w}{\pi n} + \frac{k_n}{n}, \{k_n\} \in L_2$$

asimptotik formüller geçerlidir. Burada $w = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)dt$ dir.

Gerçekten de,

$$\begin{aligned}
y_2(x,k) &= \alpha\cos kx + \frac{\alpha}{k}\int\limits_0^{x_0-0}\sin k\,(x-t)\,q(t)y_1(t,k)dt \\
&+\frac{1}{k}\int\limits_{x_0+0}^{x}\sin k(x-t)q(t)y_2(t,k)dt \\
y_2'(x,k) &= -k\alpha\sin kx + \alpha\int\limits_0^{x_0-0}\cos k\,(x-t)\,q(t)y_1(t,k)dt \\
&+\int\limits_{x_0+0}^{x}\cos k(x-t)q(t)y_2(t,k)dt
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. $y_2(x,k) = \alpha\cos kx + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|Imk|x}\right)$ ve $y_1(x,k) = \cos kx + O(\frac{1}{|k|}e^{|Imk|x})$ eşitlikleri $y_2'(x,k)$ ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
y_2'(x,k) &= -k\alpha\sin kx + \alpha\int\limits_0^{x_0-0}\cos k\,(x-t)\,q(t)y_1(t,k)dt \\
&+\int\limits_{x_0+0}^{x}\cos k(x-t)q(t)y_2(t,k)dt + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|Imk|x}\right) \\
&= \sin kx - \frac{w}{k}\cos kx + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|Imk|x}\right)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Burada $w = \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)dt$ dir. Bulunan $y_2'(x,k)$ ifadesi $\Delta(k) = y'(\pi,k) = 0$ da yerine yazılırsa;

$$\Delta(k) = y'(\pi,k) = -\alpha k\left[\sin k\pi + \frac{w}{k}\cos k\pi + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|Imk|x}\right)\right]$$

elde edilir. Verilen problemin özdeğerleri ile $\Delta(k)$'nın sıfırları çakışmaktadır.

$\Gamma_n = \left\{k : |k| = \left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}$ bölgesini alalım.

$f(k) = \sin k\pi,\ g(k) = -\frac{w}{k}\cos k\pi + O\left(\frac{1}{|k|}e^{|Imk|x}\right)$ olsun.

$\Delta(k) = f(k) + g(k),\ \forall k\in\Gamma_n$

$$\begin{aligned}
|\sin k\pi| &= \left|\frac{e^{ik\pi}-e^{-ik\pi}}{2}\right| \geq \frac{\left|e^{ik\pi}\right| - \left|e^{-ik\pi}\right|}{2} \\
&= \frac{e^{Imk\pi}-e^{Imk\pi}}{2} \geq \frac{1}{2}e^{|Imk|\pi}
\end{aligned}$$

$$|f(k)| = |\sin k\pi| \geq c_1e^{|Imk|\pi} \tag{3.6}$$

dır. Ayrıca $|\cos k\pi| \leq e^{|Imk|\pi}$, $|\sin k\pi| \leq e^{|Imk|\pi}$ olduğundan;

$$|g(k)| \leq \frac{|w|}{|k|}e^{|Imk|\pi} \tag{3.7}$$

(3.6) ve (3.7)' den k' nın yeterince büyük değerlerinde

$$|f(k)| \geq ce^{|Imk|\pi} \geq g(k)$$

sağlanır. Yani Rouche Teoremi'nin koşulları sağlanmış olur. O halde $f(k)$ ve $\Delta(k)$'nın sıfırlarının sayısı aynıdır. Buradan da $k_n = n + \varepsilon_n, \varepsilon_n = o(1), n \to \infty$ elde edilir. ε_n in ifadesini $\Delta(k_n) = 0$ eşitliğinden bulalım.

$$\Delta(k_n) = f(k) + g(k) = \sin k\pi - \frac{w}{k}\cos k\pi + O\left(\frac{1}{k_n}\right) = 0$$

veya

$$\sin k_n\pi - \frac{w}{k_n}\cos k_n\pi + O\left(\frac{1}{k_n}\right) = 0$$

olduğundan

$$\sin(n+\varepsilon_n)\pi - \frac{w}{(n+\varepsilon_n)}\cos(n+\varepsilon_n)\pi + \frac{\delta_n}{n} = 0,$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa;

$$\varepsilon_n = \frac{w}{n\pi} + \frac{\delta_n}{n}, \delta_n \in \ell_2$$

elde edilir. Buradan $k_n = n + \varepsilon_n$ ifadesinde ε_n yerine yazılırsa;

$$k_n = n + \frac{w}{n\pi} + \frac{\delta_n}{n}, \delta_n \in \ell_2$$
$$\lambda_n = k_n^2 = n^2 + \frac{w}{\pi} + \delta_n, \delta_n \in \ell_2$$

bulunur.

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ sınır değer probleminin özdeğerleri ve $\varphi(x,\lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları da λ_n özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar olsun.

O halde Sturm Teorisi'nden alırız ki; $\varphi_n(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında tam n tane $x_1^n, x_2^n, ..., x_n^n$ sıfırlara sahiptir.

Yani $\varphi_n(x_k^n) = 0, (k = \overline{1,n})$ dır.

$n = 0$ için λ_0 özdeğer ve $\varphi(x,\lambda_0) = \varphi_0(x)$, λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olsun. O halde Sturm Teorisi'nden $\varphi_0(x)$ 'in hiçbir sıfırı yoktur.

(3.1) eşitliğinde $\varphi_0(x)$ yazılırsa;

$$-\varphi_0''(x) + q(x)\varphi_0(x) = \lambda_0\varphi_0(x)$$

$\lambda_0 = 0$ olduğu için ;

$$-\varphi_0''(x) + q(x)\varphi_0(x) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$q(x) = \frac{\varphi_0''(x)}{\varphi_0(x)}, x \in [0,x_0) \cup (x_0,\pi]$$

bulunur. Diğer taraftan $\varphi_0(x)$ in hiçbir sıfırı olmadığından $\varphi_0(x) \neq 0$ dır. Yani bu oran tanımlıdır.

$$q(x) = \frac{\varphi_0''(x)}{\varphi_0(x)} = \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)' + \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 \tag{3.8}$$

şeklinde yazalım.

(3.1)-(3.3) sınır değer probleminin özdeğerleri;

$$\lambda_n = n^2 + a_0 + \psi(n)$$

davranışına sahiptir. Burada $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi q(x)dx$ dır. Böylece

$$q(x) = \frac{\varphi_0''(x)}{\varphi_0(x)} = \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)' + \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 \quad x \in [0, x_0) \cup (x_0, \pi]$$

bulunur.

$$\int\limits_0^{x_0-0} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)' dx + \int\limits_{x_0+0}^{\pi} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)' dx$$
$$= \frac{\varphi_0'(x_0-0)}{\varphi_0(x_0-0)} - \frac{\varphi_0'(0)}{\varphi_0(0)} + \frac{\varphi_0'(\pi)}{\varphi_0(\pi)} - \frac{\varphi_0'(x_0+0)}{\varphi_0(x_0+0)} = 0$$

olduğundan;

$$0 = \int\limits_0^{x_0-0} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 dx +_{x_0+0}^{\pi} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 dx$$

elde edilir. Buradan

$$\left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 \equiv 0$$

ve $\forall x \in (x_0+0, \pi]$ için $\left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 \geq 0$ ve $\int\limits_{x_0+0}^{\pi} \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 dx = 0$ dır. Yani

$$\forall x \in [x_0+0, \pi) \text{ için } \left(\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\right)^2 \equiv 0$$

dır. $\forall x \in [0, x_0-0) \cup (x_0+0, \pi]$ için $\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} \equiv 0$ dolayısıyla

$\forall x \in [0, x_0) \cup (x_0, \pi]$ için

$$q(x) \equiv 0$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1]. V.A. Ambartsumyan, Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53 (1929), 690-695.

[2]. G.Borg, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimnung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78 (1945), 1-96.

[3]. N. Levinson, 1949, The Inverse Sturm-Liouville Problem, Mat. Tidsskr. B., pp. 25-30.

[4]. N. Levinson, 1949, Criteria for the Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators, Casopis. Pest. Mat. Fya. 74, 17-20.

[5]. V.A. Marchenko, Some Problems in the Theory of Second-order Differential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72 (1950), 457-560.

[6]. M.G. Krein, Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 76 (1951), 21-24.

[7] A.N. Tikhonov, Uniqueness Theorems for Jeophysics Problems, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol 69, No 4, 1949, 797-800.

[8]. I.M. Gelfand and B. M. Levitan, On the Determination of a Differential Equation by its Spectral Function, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 15 (1951), 309-360.

[9]. M.G. Gasimov and B. M. Levitan, About Sturm-Liouville Differential. Operators., Math. Sborn., 63 (105), No. 3, (1964).

[10]. E. Abdukadyrov, 1967, Computation of the Regularized Trace for a Dirac System, Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh., 22, (4), 17-24.

[11]. A. B. Khasanov, 1994, On Eigenvalues of the Dirac Operator Located on the Continuous Spectrum, Theory and Math. Phys. v. 99, No:1, 20-26.

[12]. M. G. Gasymov, 1967, The Inverse Scattering Problem for a System of Dirac Equations of Order 2n, Soviet Physics Dokl. 11, 676-678.

[13]. J. Pöschel and E. Trubowitz, 1987 Inverse Spectral Theory(Pure Appl. Math. Vol 130)(Orlando, FL:Academic).

[14]. R. Kh. Amirov and V. A. Yurko, On Differential Operators with Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval. Ukr. Math. Jour., 2001, v. 53, No11, p. 1443-1458.

[15]. R. Kh Amirov, Direct and Inverse Problems for Differential Operators with Singularity and Discontinuity Conditions Inside the Interval Transactions of NAS Azerbaijan. 2002, v. 22, No1, p. 21-38.

[16]. R. Kh Amirov, On Sturm-Liouville Operators with Discontinuity Conditions Inside an Interval J. Math. Anal. Appl. 317 (2006) 163-176.