

ÜSTEL VE Kİ-KARE DAĞILIMLARI ARASINDAKİ İLİŞKİNİN SİMULASYON İLE ÜRETİLEN RANDOM SAYILARLA GÖSTERİLMESİ

Yalçın KARAGÖZ

Cumhuriyet Üniversitesi İİBF, İşletme Bölümü

Özet

Bu çalışmada üstel ve Ki-Kare dağılımları hakkında genel bilgiler verilmiş ve aralarındaki ilişki teorik olarak incelenmiştir. Bu dağılımlar için bilgisayar ortamında simülasyon tekniği ile random sayı üretimi yapılmıştır. Bu amaçla, üstel ve Ki-Kare dağılımlarının programları, delphi programlama dili kullanılarak yapılmıştır. Herbir dağılım için 1000 adet random sayı üretilmiştir. Bu random sayılar arasındaki ilişkinin belirlenmesi için Ki-Kare uygunluk testi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Olasılık, Dağılımlar arasındaki İlişki, Random Sayılar, Simülasyon, Random Sayı Üretimi

Abstract

Demonstration of Relationship between Exponential and Chi-Square Distributions With Random Numbers Produced by Simulation

In this study, the general information about exponential and Chi-Square distributions have been given and relation between them have been examined theoretically. For these distributions random numbers have been generated by the simulation method in computer. For this purpose, programmes of exponential and Chi-Square distributions have done by using delphi programming language. For each distributions 1000 random numbers have been generated. For determination of relation between this random numbers the Chi-Square goodness-of-fit test have been done.

Keywords: Probability, Relation Between Distributions, Random numbers, Simulation, Random Numbers Generation

GİRİŞ

Üstel ve Ki-Kare dağılımları arasındaki teorik ilişkiyi, üretilecek random sayılarla da göstermek için, bu dağılımların belirli parametrelerine göre üretilecek olan random sayı değerleri arasındaki uygunluk incelenecek ve %5 önem seviyesinde Ki-Kare uygunluk testi yapılacaktır.

1. ÜSTEL VE Kİ-KARE DAĞILIMLARI VE ARALARINDAKİ İLİŞKİ İÇİN TEORİK BİLGİLER

a) Üstel Dağılım

Üstel Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu:

X random değişken ve $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \text{ için} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fonsiyonuna, üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu denilir. Fonksiyondaki λ skala parametresidir.

Üstel Dağılımın Birikimli Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu:

Üstel dağılımın birikimli fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonundan

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^x = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = -(e^{-\lambda x} - e^0) = 1 - e^{-\lambda x}$$

olarak elde edilir ve

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \text{ için} \\ 0 & , x < 0 \text{ için} \end{cases}$$

biçiminde yazılır.

b) Ki-Kare Dağılımı

Ki-Kare Dağılımının Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu:

X random değişken ve n tamsayı olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2} & , 0 < x < \infty \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

fonsiyonuna, Ki-Kare dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu denilir. n dağılımın serbestlik derecesini gösteren şekil parametresidir.

Ki-Kare Dağılımının Birikimli Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu:

Ki-Kare dağılımının birikimli fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonundan

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{t^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-t/2}}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} dt = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-2x} (2x)^k}{k!} , x > 0$$

biçiminde yazılır (Aytaç 1999: 318).

c) Üstel ve Ki-Kare Dağılımları Arasındaki İlişki

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

üstel dağılım fonksiyonunda $\lambda = 1/2$ alındığında, serbestlik derecesi $n = 2$ olan

$$\chi^2(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$$

Ki-Kare dağılımı meydana gelir (Leemis 1986 143-144).

2. RANDOM SAYI ÜRETİMİ

Bu çalışmada, random sayı üretimi için simülasyon tekniği kullanılacaktır

Random sayılar; $[0,1]$ aralığında düzgün (üniform) olarak dağılmış, her birinin seçilme olasılığı diğerine eşit ve meydana geliş sıraları birbirinden bağımsız olan sayılardır (Sarıaslan, 1998: 74).

Simülasyon; gerçek sistemin modelinin tasarlanması ve bu model ile, sistemin işletilmesi amacına yönelik olarak, sistemin davranışını anlayabilmek veya değişik stratejileri değerlendirebilmek (ölçütler kümesinin verdiği sınırlar içinde) için deneyler yürütme sürecidir (Erkut 1992: 2).

Dağılımların Algoritmaları

a) Üstel dağılım:

Üstel dağılımın,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \quad \text{için} \\ 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonuna, ters dönüşüm metodu uygulanarak,

$$U = F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow e^{-\lambda x} = 1 - U \Rightarrow -\lambda x = \ln(1 - U) \Rightarrow x = -\frac{\ln(1 - U)}{\lambda}$$

bulunur. $1-U$ ifadesinde U random sayı olduğuna göre $U(0,1)$ 'de random sayıdır. Dolayısıyla,

$$x = -\frac{\ln U}{\lambda} \quad , \quad 0 \leq x < \infty \quad , \quad \lambda > 0$$

yazılır (Şahin 2000: 64; Pfeiffer 1990: 257; Kennedy-Gentle 1980: 177; Tuckwell 1988: 84; Bajpai-Calus-Fairley 1986 123 117; Kheir 1988: 128; Ripley 1987: 59; Rice 1988: 58; Pritsker 1986: 713; Hoover-Perry 1990: 266).

Random sayı üretimi:

1. $U = U(0,1)$ üretilir.

2. $x = -\frac{\ln U}{\lambda}$ olarak hesaplanır ve sonuç döndürülür.

b) Ki-Kare Dağılımı:

Z_i , $i = 1, \dots, n$ olmak üzere, n tane bağımsız standart normal dağılım için $Z_1^2, Z_2^2, \dots, Z_n^2$ toplamı ile, n serbestlik dereceli Ki-Kare dağılımı elde edilir ve

$$\chi_n^2 \approx \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

biçiminde yazılır (Ross1989: 491; Matloff 1988: 95,128-129; Sobol 1984: 81-82). n 'in değeri arttıkça, standart normal dağılım, ki-kareye yaklaşmaktadır (Dagpunar 1988: 128-129).

Random sayı üretimi:

1. Z_i , $i = 1, \dots, n$ bağımsız standart normal dağılımı üretilir.
2. $\chi_n^2 \approx \sum_{i=1}^n Z_i^2$ olarak hesaplanır ve sonuç döndürülür.

3. DAĞILIMLAR ARASINDAKİ İLİŞKİNİN BELİRLENMESİ

Üstel dağılım ile Ki-Kare dağılımı arasındaki ilişkiyi, üretilen random sayılarla da göstermek için, $n \geq 100$ olduğu durumlarda güçlü bir test olan (Halaç, 1998: 15) Ki-Kare uygunluk testi uygulanacaktır.

a) Üstel Dağılım ile Ki-Kare Dağılımı Arasındaki İlişki

1.3'de, üstel dağılım için $\lambda = 1/2$ alınır; $n = 2$ serbestlik dereceli Ki-Kare dağılımı elde edildiği teorik olarak izah edilmiştir. Burada, $\lambda = 1/2$ parametresine göre EK 3'de üretilmiş olan üstel dağılımın random sayı değerleri ile, $n = 2$ parametresi kullanılarak EK 4'de üretilmiş olan Ki-Kare dağılımının random sayı değerleri arasındaki uygunluğun tespiti için Ki-Kare uygunluk testinin uygulaması aşağıda yapılmıştır.

1. Hipotezler.

H_0 : $\lambda = 1/2$ için üretilen üstel dağılımın random değerleri ile $n = 2$ için üretilen Ki-Kare dağılımının random değerleri arasında ilişki vardır.

H_1 : $\lambda = 1/2$ için üretilen üstel dağılımın random değerleri ile $n = 2$ için üretilen Ki-Kare dağılımının random değerleri arasında ilişki yoktur.

2. Test İstatistiği

Her iki dağılım için elde edilen değerlerin birbirine uygun olup olmadığını tespit etmek için Ki-Kare testi uygulanırsa,

Tablo:1 Ki-Kare ve Üstel Dağılımları için Ki-Kare Uygunluk Testi

Üstel için random sayı aralıkları	Üstel için aralıklara düşen random sayı miktarı	Ki-Kare için random sayı aralıkları	Ki-Kare için aralıklara düşen random sayı miktarı	Ki-Kare uygunluk testi
0 – 1.3	461	0 – 1.3	484	1.09
1.3 – 2.6	279	1.3 – 2.6	247	4.15
2.6 – 3.9	125	2.6 – 3.9	119	0.30
3.9 – 5.2	63	3.9 – 5.2	73	1.37
5.2 – 6.5	38	5.2 – 6.5	33	0.76
6.5 – 7.8	17	6.5 – 7.8	21	0.76
7.8 – 9.1	7	7.8 – 9.1	8	0.13
9.1 – 10.4	3	9.1 – 10.4	9	4.00
10.4 – 11.7	2	10.4 – 11.7	2	0.00
11.7 – 13	3	11.7 – 13	2	0.50
13 – 18	2	13 – 18	2	0.00
Toplam	1000		1000	$\chi^2 = 13.06$

$\chi^2 = 13.06$ sonucu bulunur.

3. Karar Modeli ve Karar

Üstel ve Ki-Kare dağılımlarında tahmin edilen parametre sayısı bir olduğundan $m = 1$ alınır (Akyol-Gürbüz 2002: 24) ve kritik değer χ^2 tablosundan,

$$\left. \begin{array}{l} s.d = r - 1 - m = 11 - 1 - 1 = 9 \\ \alpha = 0.05 \end{array} \right\} \chi_{0.05;9}^2 = 16.92$$

olarak bulunur.

$\chi^2 = 13.06 < \chi_{0.05;9}^2 = 16.92$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilerek $\lambda = 1/2$ için üretilen üstel dağılımın random değerleri ile, $n = 2$ için üretilen Ki-Kare dağılımının random değerleri arasında ilişki olduğuna %5 önem seviyesinde karar verilir.

SONUÇ

Bu çalışmada, teorik olarak aralarında ilişki bulunan üstel ve Ki-Kare dağılımları için simülasyon tekniği ile random sayı üretimi yapılmıştır. Her iki

dağılım arasındaki teorik ilişkinin, üretilen random sayılar arasında da, bulunup bulunmadığı incelenmiştir.

Bu amaçla; random sayıların üretimi için delphi programlama dili ile programları yapılarak her iki dağılım için 1000 adet random sayı üretilmiştir. Üretilen bu random sayılar arasındaki ilişkinin varlığını tespit etmek için; EK 3’de üretilmiş olan $\lambda = 1/2$ parametrelili üstel dağılımın random sayı değerleri ile, EK 4’de Ki-Kare dağılımının $n = 2$ parametresi için üretilmiş olan random sayı değerleri arasındaki ilişkinin tespiti için Ki-Kare uygunluk testi yapılmış ve %5 önem seviyesinde uygun olduğu gözlenmiştir.

Kaynaklar

- Akyol, Mehmet ve Fikret Gürbüz (2002), “Üç Yönlü Tablolarda χ^2 İstatistiğinin Kullanılması,” *İstatistik Araştırma Dergisi*, DİE Yayınları, Cilt 1, No: 1, 23-27
- Aytaç, Mustafa (1994), *Matematiksel İstatistik*, Uludağ Üniversitesi Basımevi, Bursa.
- Bajpai, A. C., I. M. Calus and J. A. Fairley (1986), *Statistical Methods for Engineers and Scientists*, John Wiley and Sons, New York.
- Dagpunar, John (1988), *Principles of Random Variate Generation*, Clarendon Press, Oxford.
- Erkut, Haluk (1992), *Yönetimde Simulasyon Yaklaşımı*, İrfan Yayımcılık, İstanbul.
- Halaç, Osman (1998), *İşletmelerde Simülasyon Teknikleri*, 3.Baskı, Alfa Basım Yayın Dağıtım, İstanbul.
- Hoover, Stewart V. and Ronald F. Peery (1990), *Simulation*, Addison-Wesley Publishing Company, London.
- Kennedy, William Jr. and James E. Gentle (1980), *Statistical Computing*, Marcel Dekker, Inc. New York.
- Kheir, Naim D. (1988), *Systems Modelling and Computer Simulation*, Marcel Dekker, Inc. New York.
- Leemis, Lawrence M. (1986), “Relationships Among Common Univariate Distributions,” *The American Statistician*, Vol. 40, No: 2, 1-3; 143-146
- Matloff, Norman S. (1988), *Probability Modeling and Computer Simulation*, PWS-KENT Publishing Company, Boston.
- Pfeiffer, Paul E. (1990), *Probability for Applications*, Springer-Verlag, New York.
- Pritsker, A. Alan B. (1986), *Introduction to Simulation and Slam II*, John Wiley and Sons, New York.

- Rice, John A. (1988), *Mathematical Statistics and Data Analysis*, California.
- Ripley, Brian D.(1987), *Stochastic Simulation*, John Wiley and Sons, New York.
- Ross, Sheldon M. (1989), *Introduction to Probability Models*, Academic Press, Inc., New York.
- Sarıaslan, Halil (1998), *Simulasyon Tekniği*, Turhan Kitabevi, Ankara.
- Sobol, I. M. (1975), *The Monte Carlo Method*, (Çeviren ve Uyarlayan: V.I. Kisin), Mir Publishers, Moskow.
- Şahin, Süleyman (2000), *İstatistiksel Kalite Kontrolünde Üstel ve Weibull Dağılımların X-Kontrol Grafiklerine Uygulanması Üzerine Teorik Bir Yaklaşım*, Basılmamış Doktora Tezi, Sivas.
- Tuckwell Henry C. (1988), *Elementary Application of Probability Theory*, Chapman and Hall, London.

EKLER

EK 1: Üstel Dağılım İçin Random Sayı Üreten Delphi Programı

```
procedure TForm2.ustel_dagilim;
var
  i,adet:longint;
  Lamda,u,x:real;
  f:textfile;
  dosya:string;
begin
  adet:=strtoint(edit5.text);
  Lamda:=strtofloat(edit1.text);
  dosya:=edit4.text;
  assignfile(f,dosya);
  rewrite(f);
  writeln(f,'Üstel Dağılım',' ',Lamda=',Lamda:5:2,' ',random sayı
  adeti=',adet);
  randomize;
  for i:=1 to adet do
  begin
    u:=random;
    x:=-ln(u)/Lamda;
    if x>0 then
```

```

        writeln(f,x:10:2);
    end;
    closefile(f);
end;

```

EK 2: Ki-Kare Dağılım İçin Random Sayı Üreten Delphi Programı

```

procedure TForm2.ki_kare_dagilim;
var
    n,i,j,adet:longint;
    u1,u2,x1,x2:real;
    f:textfile;
    dosya:string;
begin
    n:=strtoint(edit1.text);
    adet:=strtoint(edit5.text);
    dosya:=edit4.text;
    assignfile(f,dosya);
    rewrite(f);
    writeln(f,'Ki-Kare Dağılımı',' ','Serbeslik derecesi=',n,' random sayı
    adeti=',adet);
    randomize;
    for i:=1 to adet do
    begin
        x2:=0;
        for j:=1 to n do
        begin
            u1:=random;
            u2:=random;
            x1:=sqrt(-2*ln(u1))*sin(2*pi*u2);
            x2:=x2+x1*x1;
        end;
        writeln(f,x2:10:2);
    end;
    closefile(f);
end;

```


EK 3: Üstel Dağılım ($\lambda = 0.50$, random sayı adeti = 1000)

1.18	3.42	1.51	0.07	1.97	3.33	0.62	0.54	1.41	0.9
0.09	1.23	1.03	5.61	4.34	1.08	0.93	4.88	3.34	0.92
2.02	3.18	0.18	0.22	1.83	1.28	1.12	3.16	0.75	0.1
2.73	1.22	2.78	0.89	3.42	1.97	1.25	0.86	3.43	5.5
0.95	6.05	0.41	3.43	2.6	2.2	0.54	2.23	13.13	4.44
2.9	2.57	0.53	0.07	2.3	0.25	0.57	2.25	3.04	0.33
0.47	0.83	0.14	1.01	0.5	3.53	1.67	3.26	1.35	0.84
0.05	0.86	4.92	2.95	3.64	4.24	3.14	1.42	1.28	2.22
5.34	1.96	0.06	0.66	6.76	3.26	1.35	1.38	1.17	4.09
2.26	1.78	0.26	1.49	3.04	3.36	1.4	1.04	0.28	2.32
3.27	1.94	1.47	1.94	0.38	2.47	0.55	2.97	2.43	1.85
1.65	2.86	2.44	0.02	1.99	2.82	1.86	1.8	0.42	0.03
0.42	3.88	0.23	0.39	2.25	0.41	0.36	0.83	6	0.33
2.66	1.05	2.42	0.32	4.23	5.63	0.07	4.21	0.7	2.57
6.73	6.27	5.46	0.87	1.07	1.37	0.93	0.37	3.91	0.89
0.04	0.62	1.37	1.42	1.45	2.17	0.03	0.33	1.14	2.14
1.12	3.1	0.47	2.4	0.57	1.77	2.74	0.54	1.62	2.26
0.22	1.01	2.2	0.33	0.23	0.68	0.43	5.37	0.74	3.89
3.81	0.41	4.8	2.28	2.64	6.27	1.56	1.77	1.82	0.45
0.52	0.47	0.2	0.74	0.91	2.09	0.42	1.31	0.05	4.43
0.55	0.28	2.41	0.89	4.71	1.61	1.37	1.58	2.4	3.6
0.54	1.04	3.55	4.84	0.52	0.85	2.3	0.03	1.33	3.59
0.63	1.06	1.24	2.42	0.68	2.16	1.22	3.55	0.65	0.3
0.43	1.32	1.91	0.3	0.25	1.6	4.63	1.93	5.22	1.22
2.13	1.22	1.27	0.44	0.96	1.23	2.89	2.82	0.71	5.8
2.25	0.04	1.54	5.88	0.65	0.51	5.43	0.76	0.2	1.63
0.53	0.49	0.38	3.67	1.33	1.38	5.18	3.58	4.57	1.24
2.03	2.07	1.35	1.53	0.01	2.11	2.76	1.31	2.06	3.62
10.46	0.05	1.89	0.6	0.11	0.26	2.14	7.28	2.75	0.06
2.38	0.24	6.72	0.88	1.89	0.42	0.59	0.62	2.12	1.37
2.48	0.84	2.74	0.91	2.11	0.14	2.37	1.53	0.27	1.66
2.1	0.97	1.69	0.01	2.48	2.22	2.34	3.6	0.46	1.69
0.18	1.19	0.86	0.21	4.48	0.04	0.6	1.88	4.68	2.79
2.27	4.39	1.66	1.49	4.91	1.12	3.09	0.08	0.53	5.88
0.13	1.91	0.66	0.56	2.43	1.15	0.56	1.97	1.05	0.19
2.02	0.46	3.87	3.92	1.56	2.1	0.66	1.66	1.49	6.31
0.32	1.13	1.03	4.96	0.63	0.24	0.94	1.48	5.35	0.36
3.85	0.08	2.2	2.28	1.89	1.84	10.62	0.8	5.23	0.87
0.88	1.92	0.98	0.56	2.86	1.66	0.82	3.08	3.91	0.87
2.08	4.42	0.86	0.6	0.73	0.2	2.73	1.15	2	0.37
1.14	1.05	2.61	1.23	1.37	3.17	1.33	2.04	1.53	2.25

2.04	1.48	1.4	4.08	0	0.01	2.51	0.04	0.28	4.25
2.94	2.65	3.47	2.44	3.3	1.8	0.6	3.38	0.85	0.07
2.12	2.44	0.41	0.25	1.11	0.55	3.98	0.52	0.87	1.34
0.79	1.16	2.46	3.46	0.9	1.77	2.7	5.45	6.01	0.56
0.58	3.32	0.64	0.8	1.88	0.18	1.18	2.64	0.13	6.62
5.51	0.81	1.5	2.37	0.18	2.03	1.05	0.05	1.67	1.12
0.97	0.21	7.11	4.05	1.53	0.92	0.93	1.7	0.22	0.86
0.81	1.14	0.33	0.91	0.06	0.34	1.91	1.47	1.1	0.15
0.93	7.52	6.53	0.11	0.95	1.8	9.05	1.56	1.82	13
1.28	1.1	3.52	0.95	0.41	1.73	2.45	1.02	8.86	0.21
0.62	1.15	0.93	3.56	2.61	1.51	0.96	3.37	1.76	2.22
1.35	1.18	1.6	8.67	2.38	0.71	0.62	4.08	1.82	16.77
1.39	0.72	1.46	2.11	0.08	1.09	0.62	3.47	2.14	1.52
2.79	3.56	0.76	0.78	1.35	0.31	6.78	1.81	0.33	5.24
3.42	0.39	2.54	2.14	3.56	3.98	0.54	0.47	0.46	3.59
3.72	2.98	2.45	0.74	0.24	1.54	0.09	1.97	0.31	0.17
0.89	1.85	4.41	1.38	3.81	1.16	0.7	3.42	0.24	6.81
0.56	0.53	1.93	3.39	5.05	0.69	0.03	0.29	0.28	1.99
5.04	8.06	4.35	0.33	4.45	1.62	4.56	0.92	0.63	0.46
2.77	0.76	7.4	0.86	0.31	3.98	0.3	5.61	2.16	0.71
3.45	1.56	0.13	2.22	0.73	0.64	0.72	0.02	0.87	0.18
7.44	0.68	6.41	2.06	0.82	2.58	1.37	1.13	0.67	6.36
0.5	0.34	2.34	0.98	0.88	0.24	1.51	1.81	4.01	5.06
0.58	3.85	0.19	1.39	3.88	0.62	1.01	2.66	0.7	1.23
0.8	1.51	0.57	3.13	0.82	0.55	3.12	0.81	0.17	0.05
1.04	2.69	0.94	0.74	0.7	0.13	1.9	4.51	0	0.14
1.57	5.39	1.32	0.44	3.45	0.39	3.14	2.51	2.22	1.62
1.02	1.35	7.5	2.66	2.21	2.52	1.51	1.1	0.44	2.54
8.05	0.28	0.03	2.92	1.01	1.57	2.41	1.3	9.95	0.08
2.41	4.64	2.41	3.95	0.88	1.18	0.45	1.17	8.09	0.06
0.86	3.32	2.21	1.65	2.52	0.62	2.77	0.05	0.77	1.41
3.91	1.3	0.14	5.12	0.11	0.36	1.45	0.46	1.77	1.22
0.61	1.63	6.04	0.51	2.42	2.18	1.23	0.64	3.68	0.67
0.43	3.35	0.5	0.16	0.04	0	0.64	1.56	0.56	0.42
0.19	0.05	1.59	4.6	11.99	4.46	0.27	2.88	1.88	1.56
0.06	1.68	1.04	9.59	0.7	5.57	2.35	6.93	0.42	0.3
0.25	2.44	0.48	0.28	1.42	1.53	1.34	5.79	0.03	1.11
1.57	5.02	2.12	2.13	0.04	0.77	4.6	1.71	6.6	3.08
0.08	3.95	2.66	0.61	2.14	4.08	0.92	0.5	2.26	3.49
1.41	2.31	1.48	0.97	1	1.52	3.22	1.19	0.8	1.28
3.18	3.66	7.86	4.09	0.46	5.71	1.48	2.91	2.22	2.77
3.71	0.13	3.33	2.2	1.29	11.9	0.26	0.2	3.49	0.24
5.26	0.93	0.17	0.01	2.13	2.69	2.14	1.08	4.88	1.06

6.43	4.47	1.62	2.14	1	0.61	4.21	2.93	0.47	0.04
0.36	1.31	4.03	1.72	0.72	0.52	0.24	0.78	5.24	2.64
0.2	1.29	0.18	2.51	0.8	0.99	0.37	0.12	4.24	0.45
7.65	1.93	1.75	0.93	1.03	1.7	3.3	2.06	2.94	1.9
1.97	0.74	0.36	1.85	1.86	1.48	4.73	0.72	0.15	0.47
0.55	4.26	6.22	7.55	0.67	0.24	2.05	0.14	2.18	3.73
0.02	1.83	6.49	5.29	1.28	0.01	2.49	3.63	0.04	1.8
0.77	0.92	0.13	4.49	0.07	4.47	2.33	0.01	0.85	2.57
1.64	0.75	5.12	1.34	1.42	2.3	2.64	0.47	0.73	2.26
0.37	0.66	1.67	2.74	1.38	1.55	2.22	3.83	0.62	0.92
3.89	0.04	0.81	0.99	1.88	1.71	0.79	2.27	1.56	0.51
4.1	0.93	2.48	4.7	0.35	1.2	0.11	0.31	0.8	0.53
1.56	1.99	0.09	0.59	2.43	1.88	3.17	1.35	0.33	0.59
0.64	0.89	1.4	0	0.01	1.79	3.36	2.98	2.32	5.39
1.29	2.7	0.37	9.59	2.72	1.62	1.29	3.09	0.74	2.54
0.57	3.73	0.75	2.19	0.93	5.32	1.07	0.11	3.04	3.31

EK 4: Ki-Kare Dağılımı (n = 2, random sayı adeti = 1000)

4.84	1.15	0.28	0.6	0.4	2.59	3.97	2	2.7	2.13
0.74	1.36	6.49	1.72	0.39	1.11	10.53	6.46	1.07	0.83
0.23	0.77	1.85	5	0.6	1.54	2.08	2.08	1.7	0.1
0.99	4.63	2.35	0.44	1.58	0.09	1.67	1.74	1.2	5.32
2.66	1.14	0.22	2.39	2.01	3.2	1.6	0.54	0.62	5.59
4.07	0.9	0.54	1.06	1.14	0.96	0.34	0.25	5.52	0.41
0.78	0.03	1.02	3.85	4.18	0.68	0.7	4.48	6.35	5.52
0.04	3.38	1.06	1.44	0.51	0.34	3.33	0.33	0.87	0.08
2.53	1.32	2.4	1.03	0.56	4.93	4.08	4.11	1.42	3.2
0.76	1.31	4.9	4.12	0.45	2.01	6.15	5.54	3.34	0.44
1.06	1.2	3.12	0.15	1.47	2.65	0.02	2.72	2.3	0.11
0.73	3.05	3.06	1.12	1.63	3.07	0.32	0.94	0.75	2.19
2.89	1.84	3.6	6.58	0.51	0.71	9.77	6.71	0.85	1.48
3.27	0.32	5.01	0.79	1.6	9.65	4.68	7.56	4.88	0.28
0.16	3.19	3.02	3.59	1.85	0.57	3.33	0.61	2.04	0.57
3.05	2.72	1.21	1.97	2.8	1.32	1.83	2.07	0.23	4.37
0.43	1.03	0.56	0.6	0.97	3.6	3.71	1.19	0	5.48
0.17	0.31	0.05	1.7	1.58	2.07	0.77	2.65	0.11	1.22
0.96	0.23	2.5	2.36	1.62	2.69	1.05	3.17	0.43	1.6
6.61	0.03	1.81	0.07	0.3	0.18	2.22	11.92	3.66	1.9
5.06	4.74	1.37	0.89	1.47	1.72	1	1.03	2.36	0.06
0	0.01	0.32	0.1	1.09	1.57	0.28	0.44	2.47	0.9
1.13	1.55	1.52	3.48	0.11	1.04	0.6	0.81	0.35	0.06
0.52	3.09	0.98	2.56	1.89	1.19	0.04	0.26	0.37	0.98
0.81	3.17	1.73	0.54	0.92	5.94	0.64	2.73	0.69	0.74

0.07	0.3	1.29	4.92	2.67	2.02	0.33	3.86	0.27	2.24
0.46	1.42	2.06	3.14	0.89	3.24	2.21	1.72	5.78	3.99
1.66	0.53	0.91	0.4	2.58	5.17	5.47	3.16	2.97	0.77
1.3	4.13	0.44	3.24	10.21	0.44	5.81	3.94	0.91	2.4
1.59	1.02	2.13	0.6	1.16	1.61	0.94	0.55	2.58	0.19
4.5	0.93	2.57	3.66	0.15	0.59	0.53	4.36	0.54	0.31
3.28	1.3	2.33	0.52	0.89	0.41	0.52	1.79	0.49	0.79
0.15	1	1.02	0.84	3.16	1.39	1.53	0.32	1.81	0.29
1.48	1.22	1.85	0.75	0.19	5.06	0.22	0.64	1.63	4.02
2.06	0.38	4.23	8.46	0.47	1.58	3.67	2.39	3.09	1.17
1.77	1.83	0.35	0.39	4.21	6.1	0.8	0.23	3.2	0.67
3.23	1.76	1.52	2.48	2.83	4.08	2.8	1.84	3.8	0.41
0.33	2.18	3.42	0.08	2.83	3.3	1.84	0.53	0.29	0.16
0.52	2.24	0.65	1.53	0.39	1.53	1.2	0.22	0.59	0.48
3.59	2.94	1.57	0.23	1.44	2.32	2.7	7.51	1.31	0.45
5.05	0.49	7.01	1.25	0.69	3.65	1.79	0.53	1.27	0.64
1.77	0.4	1	3.36	4.48	4.61	14.38	2.14	0.67	1.79
7.2	0.08	1.31	5.35	0.64	3.06	1.33	2.38	0.64	0.13
6.19	0.66	8.41	2.36	0.98	2.55	1.11	0.73	3.43	2.15
2.27	0.48	3.39	1.59	0.97	3.34	2	0.04	0.18	2.05
0.25	0.04	0.33	0.64	0.69	1.21	1.97	0.47	1.28	1.47
1.01	1.84	0.31	0	0.3	0.28	2.33	0.79	0.11	6.03
3.3	3.59	0.2	3.32	0.57	0.12	1.06	0.17	0.32	4.28
4.46	1.03	0.38	0.67	0.75	1.11	0.02	0.88	0.11	3
2.8	0.94	2.73	4.46	2.63	1.73	5.09	1.15	17.46	0.73
0.09	3.43	0.19	0.66	9.96	6.83	0.8	0.44	1.78	2.4
5.53	0.08	1.71	1.4	0.61	7.15	0.17	0.46	0.31	0.17
0.45	0.69	4.64	2.97	0.14	3.91	0.81	0.87	3.7	0.56
0.77	2.4	1.31	1.84	3.14	0.07	4.17	0.06	1.69	0.37
0.83	1.04	0.95	0.48	2.15	0.32	0.24	0.12	0.39	0.86
2.87	2.32	0.02	0.06	1.66	0.74	1.21	1.04	1.97	1.41
1.83	0.05	0.98	5.79	0.42	2.04	1.06	0.14	4.85	0.01
0.73	3.44	1.21	2.23	2.17	10.38	1.67	3.87	0.3	0.3
0.64	0.58	1.95	1.67	1.13	0.85	0.46	1.87	0.06	1.45
2.2	4.99	2.2	0.17	1.86	0.71	1.79	0.24	1.08	0.92
0.21	0.4	1.85	2.07	1.23	0.03	1.83	0.16	1.14	2.1
0.35	0.53	6.12	0.91	4.41	1.16	6.6	3.82	7.18	2.75
0.99	1.21	7.14	4.81	0.86	0.39	0.44	2.91	0.36	0.47
1.29	2.57	1.18	1.78	0.56	2.38	1.66	0.93	4.56	1.17
1.93	3.22	1.12	0.34	3.1	0.27	0.66	2.27	0.01	1.93
2.01	1.24	1.45	2.96	6.55	2.61	6.73	1.67	0.9	0.45
2.12	1.42	7.13	2.09	6.14	1.22	1.29	0.13	7.27	0.59
1.91	11.05	0.08	1.27	2.22	2.58	8.98	4.83	0.27	2.39

2.45	0.1	2.86	2.42	1.3	5.87	1.32	1.33
0.21	1.42	1.98	0.97	0.53	0.19	8.41	1.01
3.53	1.8	1.9	0.59	3.67	9.36	0.17	2.34
1.1	5.19	0.24	0.91	0.3	0.71	0.76	2.69
0.19	0.77	3.63	1.73	0.25	0.57	9.47	2.3
0.34	4.19	2.56	2.25	0.01	4.48	0.77	0.83
1.63	0.07	1.32	5.23	0.42	0.19	0.41	1.81
3.98	0.26	0.62	1.07	2.01	0.8	2.77	3.31
1.37	0.36	4.84	2.44	3.15	1	0.74	2.94
0.85	1.15	3.02	0.69	2.82	3.37	0	3.45
3.21	1.11	2.12	0.78	0.45	4.5	0.47	0.09
0.64	0.74	0.77	3.66	7.88	0.4	0.78	0.03
0.65	4.95	1.59	5.09	0.13	0.8	1.99	2.67
5.98	1.14	1.27	6.13	1.25	0.93	0.61	2.34
3.75	1.78	0.54	5.51	1.52	0.06	6.89	2.23
6.75	0.96	0.05	1.72	1.61	1.58	0.2	2.21
0.23	3.38	1.87	0.98	0.69	1.17	0.77	0.3
0.65	4.77	0.41	0.64	1.35	1.55	1.3	0.31
1.11	1.82	2.16	5.1	0.86	0.54	2.91	1.5
1.03	0	0.13	3.5	0.77	0.38	1.49	
2.86	1.58	0.29	3.94	1.16	0.77	0.74	
4.79	0.02	1.39	0.46	5.98	1.53	2.39	
0.09	2.49	0.35	6.15	0.3	2.7	9.18	
1.96	4.47	11.92	1.39	1.35	1.32	3.57	
0.6	0.5	3.01	0.82	7.89	1.74	2.18	
0.52	0.6	4.55	0.04	8.56	5.01	0.35	
1.56	2.91	0.71	2.04	0.26	8.26	2.4	
1.94	0.48	0.17	0.78	1.5	2.44	0.87	
7.24	3.96	0.55	2.49	0.6	4.06	1.74	
0.55	1.29	1.3	0.84	0.87	1.46	0.56	
9.43	2.48	0.45	3.47	5.09	3.11	0.14	
0.29	0.67	0.05	1.48	1.49	0.74	1.4	
5.73	3.79	6.88	3.32	2.08	1.25	0.74	
1	0.17	3.61	5.36	7.32	1.5	2.13	
0.23	1.33	4	2.94	0.37	1.21	1.9	
4.12	5.99	3.16	0.01	1.3	3.99	4.76	
1	5	0.35	0.66	1.41	2.52	1.52	
2.22	0.85	4.58	0.76	3.88	1.7	3.76	
2.22	0.21	1.41	0.86	0.92	0.83	4.67	
0.47	0.88	2.17	1.6	0.89	1.47	0.05	
0.07	1.35	2.55	2.74	5.84	1.98	4.29	
1.69	2.09	0.3	2.48	0.2	1.24	0.41	
4.17	0.06	0.37	1.04	0.28	0.1	2.24	